数理解析研究所講究録
442巻 1981年 74-79

Pretzel Link $\mathcal{L}(2p_1, \cdots, 2p_\mu)$ の genus について

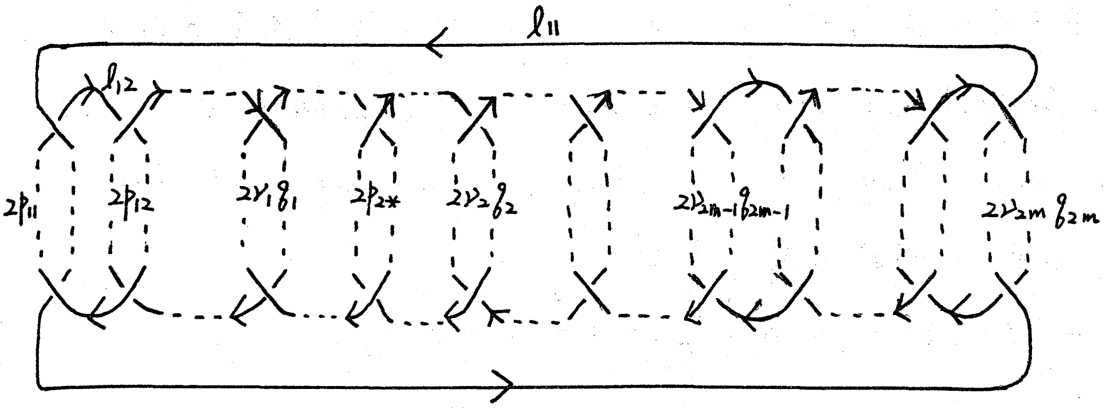
山口女子大　中川 洋子

ここで考える pretzel link $\mathcal{L}(2p_1, \cdots, 2p_\mu)$ は、$\mu \geq 3$ かつ $p_i \neq 0$ $(i = 1, \cdots, \mu)$ とする．これらの pretzel link の genus について考えてみたい。

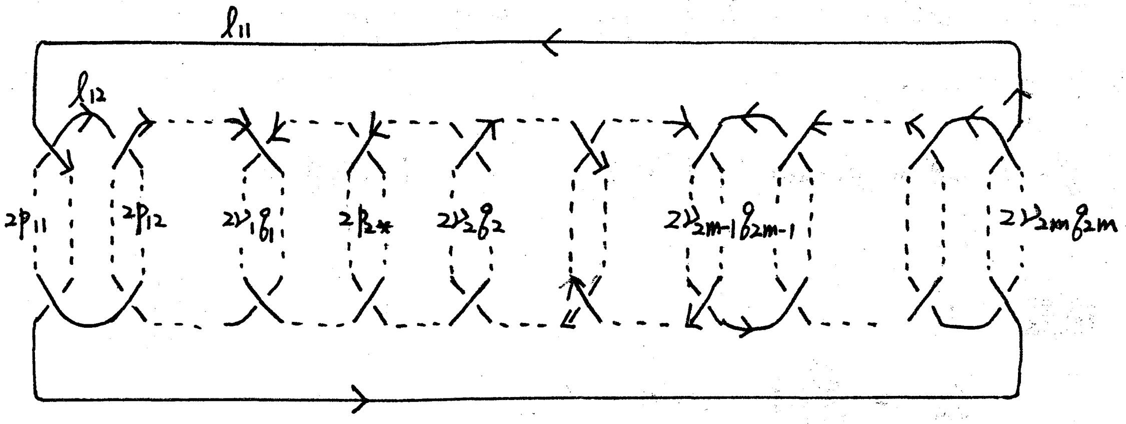
$\mathcal{L}_0(2p_1, \cdots, 2p_\mu) = l_1 \cup \cdots \cup l_\mu$ は、genus 0 の surface を張るように各 component に、orientation が与えられているとする。この $\mathcal{L}_0$ と underlying set は同じだが、各 component の orientation は異なる pretzel link を

$$\mathcal{L}(2p_1, \cdots, 2p_\mu) = \varepsilon_1 l_1 \cup \cdots \cup \varepsilon_\mu l_\mu \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

と表わすことにする。一般に、$\mathcal{L}$ が $\mathcal{L}_0$ に equivalent でなければ、$\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_\mu = -1$ と仮定することが出来る。以後、図にあるような形で pretzel link $\mathcal{L}$ を考えることにする。



$$\mathcal{L}_0(2p_{11}, \cdots, 2\nu_1 q_1, 2p_{21}, \cdots, 2\nu_{2m} q_{2m})$$
$$= l_{11} \cup \cdots \cup l_{1n_1} \cup l_{1n_1+1} \cup l_{21} \cup \cdots \cup l_{2m, n_{2m}+1}$$



$$\mathcal{L}(2p_{11}, \cdots, 2p_{1n_1}, 2\nu_1 q_1, 2p_{21}, \cdots, 2\nu_2 q_2, \cdots, 2p_{2m, n_{2m}}, 2\nu_{2m} q_{2m})$$
$$= (l_{11} \cup l_{12} \cup \cdots \cup l_{1n_1} \cup l_{1n_1+1}) \cup (-1)(l_{21} \cup \cdots \cup l_{2n_2+1})$$
$$\cup (l_{31} \cup \cdots \qquad \cup l_{3n_3+1}) \cup (-1)(l_{41} \cup \cdots \cup l_{4n_4+1})$$
$$\vdots$$
$$\cup (l_{2m-1,1} \cup \cdots \qquad \cup l_{2m-1, n_{2m-1}+1}) \cup (-1)(l_{2m,1} \cup \cdots \cup l_{2m, n_{2m}+1})$$

$$\begin{pmatrix} n_1 + n_2 + \cdots + n_{2m} + 2m = \mu \\ \nu_i = \pm 1, \quad q_i > 0 \\ i = 1, 2, \cdots, 2m \end{pmatrix}$$

[1] または [3] に示されている方法をまねて、$\mathcal{L}$ に Seifert surface S を張る。この surface S の cell-decomposition を考えて、それぞれ 0-cell, 1-cell, 2-cell の個数を数えると、

$$\#(0\text{-cell}) = 4\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 4\sum_{i=1}^{2m} q_i ,$$

$$\#(1\text{-cell}) = 6\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 6\sum_{i=1}^{2m} q_i ,$$

$$\#(2\text{-cell}) = 2\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}|p_{ij}| + 4m - \mu ,$$

となっている。

g_s を S の genus とすると、次のことが解る。

補題 1.

$$g_s = \sum_{i=1}^{2m} q_i - 2m + 1 .$$

証明 オイラーの標数を考えれば明らかである。

[2] で、pretzel link $\mathcal{L}$ の Alexander polynomial が求まるので、これを用いて $\Delta(t, \cdots, t)$ の degree d を求める。この degree d と link の genus g に関して、次の事が知られている。

補題　2　([4])

$$2g+\mu-2\geq d\ .$$

一般に、$g_s\geq g$ であるから、

$$g_s\geq g\geq\frac{d-(\mu-2)}{2}$$

より、$d=2\sum_{i=1}^{2m}g_i-4m+\mu$ がいえれば、$\mathcal{L}$ の genus は Seifert surface の genus g_s であることが解る。ただし、これには条件が必要で、次のことが解る。

補題　3.

i)　ある j ($j=1,\cdots,2m$) に対し、$\nu_{2j-1}\cdot\nu_{2j}=1$ であれば、$d=2\sum_{i=1}^{2m}g_i-4m+\mu$ である。

また ii)　全ての j ($j=1,\cdots,2m$) に対し、$\nu_{2j-1}\cdot\nu_{2j}=-1$ であるとき、$\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{p_{ij}}\neq 0$ ならば、

$$d=2\sum_{i=1}^{2m}g_i-4m+\mu-2 \quad \text{である。}$$

以上より、次がいえる。

定理　以下の条件をみたせば、$\mathcal{L}$ の genus は Seifert surface の genus に等しい。

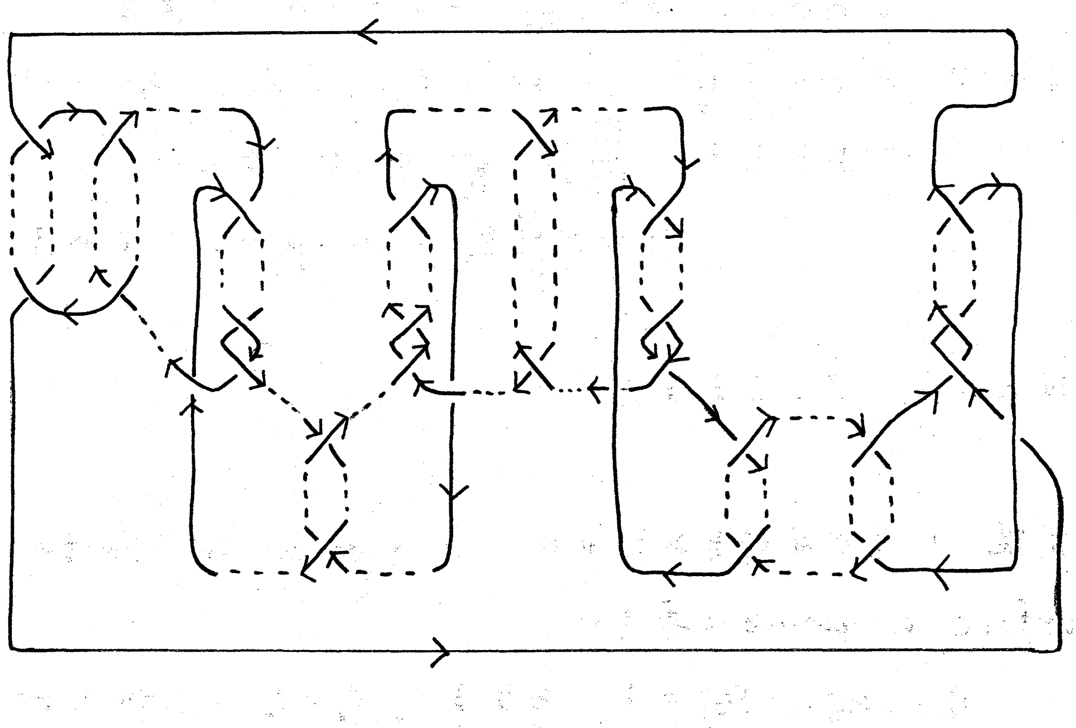
i)　$\nu_{2j-1}\cdot\nu_{2j}=1$ となる j ($j=1,\cdots,2m$) が

存在する.

または、ii) 全ての j ($j=1, \cdots, 2m$) に対し、$\nu_{2j-1}\cdot\nu_{2j}=-1$ であって、$\sum_{i=1}^{2m}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{p_{ij}} \neq 0$ である。

証明　i) の場合は、補題1と3より明らか.

ii) の場合は、$\mathcal{L}$ の projection を次の図のように変形して、surface を張り直す。この新しい surface は、genus が1つ少なくなっている。また $\Delta(t, \cdots, t)$ の degree は2つ少ないので、この場合もまた、$g_s = g$ となっている.



参考文献

[1] R. H. Crowell : *Genus of Alternating Link Types.* Ann. of Math., vol 69 (1959), 258 - 275.

[2] Y. Nakagawa : *On the Alexander Polynomials of Pretzel Links* $L(2p_1, \cdots, 2p_n)$ (to appear).

[3] H. Seifert : *Über das Geschlecht von Knoten.* Math. Ann. vol. 110 (1934), 571 - 592.

[4] G. Torres : *On the Alexander Polynomials.* Ann. of Math. 57 (1953), 57 - 89.